$$y'' + y' + y = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

La solution est la somme de la solution générale de l'eq. homogène et d'une solution particulière de l'eq. complète.

* sol g^{ale} de l'eq. homogène $\quad y'' + y' + y = 0$

$y = e^{rt} \quad ; \quad r^2 + r + 1 = 0 \quad ; \quad \Delta = 1 - 4 = -3$

$$r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y(t) = c_1 \, e^{-\frac{t}{2}} \, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 \, e^{-t/2} \, e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$= e^{-t/2}\left[c_1 \, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 \, e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right]$$

$$= e^{-t/2}\left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \psi\right)\right]$$

est une solution transitoire qui tend $\to 0$ à cause de $e^{-t/2}$

* Sol. particulière eq. complète

$y = a \cos(2t + \varphi) \quad ;$ on cherche a et φ

rappel

		dep. temp $e^{+i\omega t}$	
	$u(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{U} = a\, e^{+i\varphi}$
linéarité	$\sum_n \lambda_n \, u_n(t)$ réels	$\longleftrightarrow$	$\sum_n \lambda_n \, \mathcal{U}_n$
dérivation	$u'(t)$	$\longleftrightarrow$	$+i\omega\, \mathcal{U}$

$$y'' + y' + y = \cos\left(2t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = a \cos(2t + \varphi) \longleftrightarrow \mathcal{Y} = a\, e^{i\varphi}$$

$$-4\mathcal{Y} + 2i\mathcal{Y} + \mathcal{Y} = e^{-i\pi/6}$$

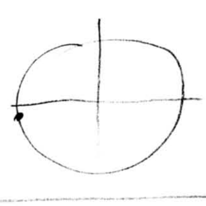
$$\mathcal{Y} = \frac{e^{-i\pi/6}}{-3 + 2i} = a\, e^{i\varphi}$$

$$a = |\mathcal{Y}| = \frac{1}{\sqrt{9+4}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}} = a}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\mathcal{Y}}{a} = \frac{\sqrt{13}\, e^{-i\pi/6}}{-3+2i} = \frac{\sqrt{13}\,(-3-2i)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

$$= \frac{(-3-2i)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{13}} = \frac{(+3+2i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{13}} = \frac{-\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\varphi = -\frac{1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}} = -0.9979$$



$$\sin\varphi = \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{13}} = -0.0644$$

$$\to \boxed{\varphi = -3{,}077 \text{ rad} = +3.206 \text{ rad } [2\pi]}$$